การสอบแข่งขันเพื่อรับทุนรัฐบาลฯ ไปศึกษาวิชา ณ ต่างประเทศ ประจำปี 2569
(ทุนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย)

ข้อสอบวิชา คณิตศาสตร์
สอบวันเสาร์ที่ 20 ธันวาคม 2568 เวลา 13.30 – 16.30 น. (จำนวน 5 หน้า 100 คะแนน)

(ให้ทำข้อ 1 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 1 ข้อ 2 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 2 ข้อ 3 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 3 ข้อ 4 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 4 และข้อ 5 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 5) **และให้ใช้ปากกาหมึกสีน้ำเงินหรือสีดำในการทำตอบ**

ถ้าทำผิดชุดจะไม่ได้รับการตรวจ

ทั้งนี้ ให้เขียนเลขประจำตัวสอบในสมุดเขียนตอบ เฉพาะตอนที่ 3 เท่านั้น **ห้าม** เขียนชื่อ-นามสกุล หรือเลขประจำตัวสอบ ในสมุดเขียนตอบส่วนอื่น ๆ โดยเด็ดขาด กรณีที่เขียนเลขประจำตัวสอบผิด หรือไม่เขียนเลขประจำตัวสอบ **จะไม่ตรวจให้คะแนน**

ข้อ 1 ประกอบด้วย ข้อ 1.1 – 1.3 (20 คะแนน)

ให้เขียนคำตอบและแสดงวิธีทำอย่างละเอียดลงในสมุดเขียนตอบ

1.1 กำหนดให้ p, q และ r ประพจน์ โดยที่ประพจน์ต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง **(6 คะแนน)**

$$[(q \rightarrow p) \vee (\sim p \rightarrow r)] \leftrightarrow (\sim p \vee \sim r)$$

จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้ หรือถ้าสรุปค่าความจริงไม่ได้ ให้ยกตัวอย่างอธิบาย

(ก) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow r)$

(ข) $r \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$

1.2 ให้ $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|+1}$ จงหาเซตคำตอบของอสมการ $f(f(x)) > x$ **(7 คะแนน)**

1.3 ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ที่มีสมาชิก 15 ตัว **(7 คะแนน)**

ให้ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นสับเซต n สับเซตของ U ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(ก) เซต $A_1, A_2, \ldots, A_n$ แต่ละเซตมีสมาชิก 3 ตัว

(ข) ถ้า $x, y \in U$ โดยที่ $x \neq y$ แล้วจะมีเซต A_i เพียงเซตเดียวซึ่ง $x \in A_i$ และ $y \in A_i$

จงหา n ที่เป็นไปได้ ที่จะมีสับเซต $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ที่สอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าว

ข้อ 2 ประกอบด้วย ข้อ 2.1 – 2.3 (20 คะแนน)
ให้เขียนเฉพาะคำตอบลงในสมุดเขียนตอบ

2.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่

$$f(x) = \frac{ax}{bx+1} \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x \neq -\frac{1}{b}$$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์

ถ้า $(f \circ f \circ f)(x) = \frac{x}{x+8}$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ใน $D_{f \circ f \circ f}$

แล้วค่าของ $a + b$ เท่ากับเท่าใด (7 คะแนน)

2.2 จงหาเซตคำตอบของสมการ

$$3\log_2 \sqrt[3]{x^2} + 6\log_x(16x) = 40(\log_x 27)\left(\log_9 \sqrt[3]{x}\right)$$

(7 คะแนน)

2.3 กำหนดให้ E เป็นวงรีซึ่งมีสมการเป็น

$$16x^2 + 41y^2 - 32x + 164y - 476 = 0$$

และให้ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งผ่านจุด $(4, -2)$ และมีโฟกัสทั้งสองอยู่ที่โฟกัสทั้งสองของวงรี E จงหาสมการของไฮเพอร์โบลารูปนี้ (6 คะแนน)

ข้อ 3 ประกอบด้วย ข้อ 3.1 – 3.3 (20 คะแนน)

3.1 ให้เขียนคำตอบและแสดงวิธีทำอย่างละเอียดลงในสมุดเขียนตอบ

จงหาเซตคำตอบของสมการ

$$\arctan(3x) + \arctan(5x) = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$$

(7 คะแนน)

3.2 ให้เขียนคำตอบและแสดงวิธีทำอย่างละเอียดลงในสมุดเขียนตอบ

กำหนดเมทริกซ์ $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $R = \begin{bmatrix} 1 & a & -6 \\ b & a & -c \\ c & c & -c \end{bmatrix}$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง

ที่ทำให้มีเมทริกซ์ X ที่สอดคล้องกับสมการ $P(X^{-1})Q = R$

จงหาค่าของ X หรือพิสูจน์ว่าไม่มีจำนวนจริง a, b, c ที่ทำให้สมการเป็นจริง **(7 คะแนน)**

3.3 ให้เขียนคำตอบและแสดงวิธีทำอย่างละเอียดลงในสมุดเขียนตอบ

กำหนดเวกเตอร์ $\vec{u} = -3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 13\vec{k}$ และ $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} - 7\vec{k}$

(1) จงหาความยาวเส้นทแยงมุมทั้ง 2 เส้น ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประกอบมุม

เป็น $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ **(3 คะแนน)**

(2) ถ้า $\vec{w} = -\vec{\imath} + x\vec{\jmath} - \vec{k}$ แล้วจงหาค่า x ทั้งหมดที่ทำให้ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ที่มีด้านประกอบได้แก่ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ มีค่าเท่ากับ 8 **(3 คะแนน)**

ข้อ 4 ประกอบด้วย ข้อ 4.1-4.3 (20 คะแนน)

4.1 ให้เขียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียดลงในสมุดเขียนตอบ (6 คะแนน)

จงหาจำนวนจริง a ทั้งหมดที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = x(x-a)(x+a)$ มีจุดวิกฤตสองจุดที่อยู่บนเส้นตรง $y = -x$

4.2 ให้เขียนเฉพาะคำตอบลงในสมุดเขียนตอบ (7 คะแนน)

นิยามเซตต่อไปนี้

$$T = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists r \in \mathbb{R}^+, z^8 = (z-2i)^8 = r\}$$

นั่นคือ T เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน z ที่ทำให้สมการ $z^8 = (z-2i)^8 = r$ เป็นจริงสำหรับจำนวนจริงบวก r บางค่า

จงหาผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดในเซต T นั่นคือ

$$\sum_{z \in T} |z|$$

4.3 ให้เขียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียดลงในสมุดเขียนตอบ (7 คะแนน)

$$S_k(p) = \sum_{i=k}^{2k} p^k = p^k + p^{k+1} + p^{k+2} + \cdots + p^{2k}$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก k และจำนวนจริง p แล้วจงหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ต่อไปนี้

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i(p) = S_0(p) + S_1(p) + S_2(p) + S_3(p) + \cdots$$

เมื่อกำหนดให้ $p = \frac{1}{3}$

ข้อ 5 ประกอบด้วยข้อ 5.1-5.3 (20 คะแนน)

5.1 ให้เขียนแสดงวิธีทำโดยละเอียดลงในสมุดเขียนตอบ

จากเลขโดด $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ **ให้เลือกมา** 6 **ตัวที่แตกต่างกันและนำมาเรียงกันเป็นจำนวนเต็มหกหลัก** โดยกำหนดว่า **เลขโดดหลักซ้ายสุดห้ามเป็น** 0 **และจำนวนหกหลักที่ได้นั้นต้องเป็น**จำนวนที่ **หารด้วย** 3 **ลงตัว** จงหาว่ามีจำนวนเต็มหกหลักที่เป็นไปได้ทั้งหมดกี่จำนวน

หมายเหตุ จำนวนเต็มบวกใด ๆ จะหารด้วย 3 ลงตัวก็ต่อเมื่อผลรวมของเลขโดดทุกหลักหารด้วย 3 ลงตัว เช่น 123 มีผลรวม $1 + 2 + 3 = 6$ ซึ่งหารด้วย 3 ลงตัว ดังนั้น 123 เป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว

(7 คะแนน)

5.2 ให้เขียนเฉพาะคำตอบลงในสมุดเขียนตอบ

แก้ว ดาว และปืน ต่างคนต่างโยนเหรียญที่เที่ยงตรงคนละ 3 **เหรียญพร้อมกันหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ทั้งสามคนจะได้เหรียญที่ขึ้นหัวเป็นจำนวนเท่ากัน**

(6 คะแนน)

5.3 ให้เขียนแสดงวิธีทำโดยละเอียดลงในสมุดเขียนตอบ

เวลาที่ผู้ป่วยใช้ในการพบทันตแพทย์คนหนึ่งถือว่าเป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 10 นาที ข้อมูลเวชระเบียนระบุว่า 84.13% ของผู้ป่วยที่มาพบทันตแพทย์คน**นี้มี**เวลาพบแพทย์น้อยกว่า 12 นาที

(1) จงหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของเวลาในการพบทันตแพทย์

(2) จงหาความน่าจะเป็นที่เวลาของผู้ป่วยคนหนึ่งซึ่งสุ่มเลือกมา แตกต่างไปจากค่าเฉลี่ยมากกว่า 2 นาที

กำหนดตารางค่าบางส่วนของความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน Z มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ z ดังนี้

z	0.8413	1.000	1.500	2.000
$P(Z \leq z)$	0.7999	0.8413	0.9332	0.9772

(7 คะแนน)